Общие теоремы о факторизации оператор-функций относительно контура. I. Голоморфные функции

И. Ц. ГОХБЕРГ и Ю. ЛАЙТЕРЕР (Кишинев, СССР)

Посвящается академику Б. С.-Надь к его шестидесятилетию

Пусть Γ — линия в комплексной полоскости, состоящая из конечного числа непересекающихся замкнутых спрямляемых жордановых кривых. Предполагается, что контур Γ разбивает расширенную плоскость на два открытых множества F^+ и F^-, причем каждая точка Γ является граничной как для F^+, так и для F^-. Кроме того, предполагается, что $\infty \in F^-$ и $0 \in F^+$.

Обозначим через $L(\mathfrak{B})$ алгебру всех линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, и через $GL(\mathfrak{B})$ группу обратимых операторов из $L(\mathfrak{B})$.

Пусть $A: \Gamma \to L(\mathfrak{B})$ — непрерывная оператор-функция. Следуя [1], представление оператор-функции A в виде

$$A = A_- D A_+$$

назовем *факторизацией A относительно контура Γ*, если множители обладают следующими свойствами:

1. оператор-функция $D: \Gamma \to L(\mathfrak{B})$ имеет вид

$$D(\zeta) = \sum_{j=1}^{n} \zeta^{\varkappa_j} P_j + P_0,$$

где операторы P_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ являются дизъюнктными одномерными проекторами из $L(\mathfrak{B})$, $P_0 = I - P_1 - P_2 - \cdots - P_n$ и $\varkappa_1 \geqq \varkappa_2 \geqq \cdots \geqq \varkappa_n$ — некоторые целые числа, отличные от нуля;

2. оператор-функции $A_-, A_+: \Gamma \to L(\mathfrak{B})$ допускают продолжения, голоморфные внутри и непрерывные, включая границу, соответственно в $F^+ \cup \Gamma$ и $F^- \cup \Gamma$, причем все значения оператор-функций A_-, A_+ и их продолжений обратимы.

Если оператор-функция $A: \Gamma \to L(\mathfrak{B})$ допускает факторизацию относительно контура Γ, то, как показано в [1], целые числа $\varkappa_1 \geqq \varkappa_2 \geqq \cdots \geqq \varkappa_n$ однозначно определяются оператор-функцией A. Эти числа называются *частными индексами* оператор-функции A, а число $\operatorname{Ind} A$, опеределяемое равенством

$$\operatorname{Ind} A = \sum_{j=1}^{n} \varkappa_j$$

называется *суммарным индексом.*

В настоящей статье устанавливаются критерии возможности факторизации относительно контура для оператор-функций из различных банаховых алгебр.

Рассмотрим сначала случай, когда пространство $\mathfrak{B}$ является гильбертовым пространством ($\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$).

Обозначим через $\mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_2(\Gamma, \mathfrak{H})$ гильбертово пространство сильно измеримых функций $f: \Gamma \to \mathfrak{H}$ со скалярным произведением

$$(f, g)_{\mathbf{L}_2} = \int_\Gamma (f(\zeta), g(\zeta))_{\mathfrak{H}} |d\zeta| \qquad (f, g \in \mathbf{L}_2(\Gamma, \mathfrak{H}))$$

Оператор $\mathbf{P}$, определенный в $\mathbf{L}_2(\Gamma, \mathfrak{H})$ равенством

$$(0.1) \qquad (\mathbf{P}\varphi)(\zeta) = \frac{1}{2}\varphi(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(z)}{z-\zeta}\,dz \qquad (\varphi \in \mathbf{L}_2(\Gamma, \mathfrak{H})).$$

является ограниченным проектором*) и вектор-функции из его множества значений $\mathbf{L}_2^+ = \operatorname{Im} \mathbf{P}$ допускают голоморфные продолжения в F^+.

Пусть $A: \Gamma \to L(\mathfrak{H})$ — непрерывная оператор-функция. Условимся через $\mathbf{A}$ обозначать линейный ограниченный оператор, действующий в пространстве $\mathbf{L}_2(\Gamma, \mathfrak{H})$ по правилу $(\mathbf{A}f)(\zeta) = A(\zeta) f(\zeta) (f \in \mathbf{L}_2, \zeta \in \Gamma)$.

Приведем для примера четыре следствия, вытекающие из основных теорем статьи.

Теорема 0.1. *Пусть оператор-функция $A: \Gamma \to L(\mathfrak{H})$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем α $(0 < \alpha < 1)$, т. е.*

$$\sup_{\zeta_1, \zeta_2 \in \Gamma; \zeta_1 \neq \zeta_2} \left(\|A(\zeta_1) - A(\zeta_2)\| / |\zeta_1 - \zeta_2|^\alpha\right) < \infty.$$

Для того чтобы оператор-функция A допускала факторизацию относительно контура Γ, необходимо и достаточно, чтобы оператор **PA** *был Φ-оператором**) *в пространстве $\mathbf{L}_2^+$.*

Если оператор-функция A допускает факторизацию $A = A_- D A_+$, то множители $A_\pm$ также удовлетворяют условию Гельдера на Γ с показателем α.

---

*) Во введении предполагается, что контур Γ является достаточно гладким.

*) Оператор B насывается Φ-оператором [2], если его множество значений замкнуто и числа $\dim \operatorname{Ker} B$ и $\dim \operatorname{Coker} B$ конечны.

В случае факторизации относительно единичной окружности $\Gamma_0 = \{\zeta : |\zeta| = 1\}$ имеет место следующее предложение.

Теорема 0. 2. *Пусть оператор-функция $A: \Gamma_0 \to L(\mathfrak{H})$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье*

$$A(\zeta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \zeta^j A_j, \qquad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \|A_j\| < \infty,$$

где $A_j \in L(\mathfrak{H})$.

Для того чтобы оператор-функция A допускала факторизацию относительно окружности Γ_0, необходимо и достаточно, чтобы оператор $\mathbf{P}A$ *был Ф-оператором в пространстве* $\mathbf{L}_2^+$.

Если оператор-функция A допускает факторизацию $A = A_- D A_+$, то множители A_-, A_+ также разлагаются в абсолютно сходящиеся ряды соответственно по неположительным или неотрицательным степеням ζ.

Приведем еще две теоремы о факторизации в случае произвольного банахова проствранства $\mathfrak{B}$. Обозначим через $H_\alpha(\Gamma, \mathfrak{B})$ $(0<\alpha<1)$ банахово пространство вектор-функций $f: \Gamma \to \mathfrak{B}$ удовлетворяющих условию Гельдера с показателем α и нормой

$$\|f\|_\alpha = \max_{\zeta \in \Gamma} \|f(\zeta)\|_{\mathfrak{B}} + \sup_{\zeta_1, \zeta_2 \in \Gamma; \zeta_1 \neq \zeta_2} \|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)\| / |\zeta_1 - \zeta_2|^\alpha$$

Оператор $\mathbf{P}$, определенный формулой (0. 1), является линейным ограниченным проектром в пространстве $H_\alpha(\Gamma, \mathfrak{B})$. Обозначим через $H_\alpha^+(\Gamma, \mathfrak{B})$ множество значений оператора $\mathbf{P}$.

Теорема 0. 3. *Для того чтобы оператор-функция $A: \Gamma \to GL(\mathfrak{B})$ из $H_\alpha(\Gamma, L(\mathfrak{B}))$ $(0<\alpha<1)$ допускала факторизауию относительно Γ, необходимо и достаточно, чтобы оператор* $\mathbf{P}A$ *был Ф-оператором в пространстве $H_\alpha^+(\Gamma, \mathfrak{B})$.*

Если A допускает факторизацию $A = A_- D A_+$, то $A_\pm \in H_\alpha(\Gamma, \mathfrak{B})$.

Рассмотрим пространство $\mathfrak{W}(\mathfrak{B})$ всех вектор-функций $f: \Gamma_0 \to \mathfrak{B}$ разлагающихся в абсолютно сходящиеся ряды Фурье

$$f(\zeta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \zeta^j f_j \qquad (f_j \in \mathfrak{B}, |\zeta| = 1)$$

с нормой

$$\|f\|_{\mathfrak{W}} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \|f_j\|_{\mathfrak{B}}$$

Легко видеть, что для проектора $\mathbf{P}$, определенного равенством (0. 1), в этом пространстве имеет место равенство

$$(\mathbf{P}f)(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} \zeta^j f_j.$$

Обозначим через $\mathfrak{W}^+(\mathfrak{B})$ множетство всех значений проектора $\mathbf{P}$.

Теорема 0.4. *Для того чтобы оператор-функция* $A: \Gamma_0 \to GL(\mathfrak{B})$ *из* $\mathfrak{W}(L(\mathfrak{B}))$ *допускала факторизацию относительно единичной окружности* Γ_0, *необходимо и достаточно, чтобы оператор* $\mathbf{PA}$ *был Ф-оператором в пространстве* $\mathfrak{W}^+(\mathfrak{B})$.

Если A допускает факторизацию $A = A_- D A_+$, *то* $A_\pm \in \mathfrak{W}(L(\mathfrak{B}))$.

Отметим, что при условиях всех четырех теорем, если оператор-функция A допускает факторизацию и $\varkappa_j$ $(j=1, 2, \dots, n)$ — ее частные индексы, то

$$\dim \operatorname{Ker} \mathbf{PA} = -\sum_{\varkappa_j<0} \varkappa_j, \qquad \dim \operatorname{Coker} \mathbf{PA} = \sum_{\varkappa_j>0} \varkappa_j$$

и, следовательно,

$$\operatorname{Ind}(A, \Gamma) = \operatorname{Ind} \mathbf{PA}.$$

Теоремы 0.1 и 0.3 обобщают на бесконечномерный случай известную теорему И. Племели, Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа [3, 4] о том, что всякая неособенная матрица-функция с элементами, удовлетворяющими условию Гельдера с показателями α $(0<\alpha<1)$, допускает факторизацию. Отметим, что в случае конечномерного пространства $\mathfrak{H}$ или $\mathfrak{B}$ оператор $\mathbf{PA}$ является Φ-оператором в H_α^+ и $\mathbf{L}_2^+$ для любой неособенной матрицы-функции A.

Теоремы 0.2 и 0.4 являются обобщениями теоремы М. Г. Крейна и одного из авторов [5] о факторизации неособенных матриц-функций с элементами, разлагающимися в абсолютно сходящиеся ряды Фурье. Для таких матриц-функций оператор $\mathbf{PA}$ также всегда является Φ-оператором в пространствах $\mathbf{L}_2^+$ и $\mathfrak{W}^+$.

Статья состоит из двух частей. В первой части излагаются результаты, относящиеся к голоморфным оператор-функциям, а во второй — различные обобщения*). Первая часть является основной в идейном отношении. Она состоит из трех параграфов. Первый носит вспомогательный характер. В нем, в частности, формулируются теоремы из статей [6—8], которые играют важную роль в дальнейших доказательствах. Во втором параграфе доказывается основная теорема о факторизации голоморфных оператор-функций. Эта теорема неоднократно используется в доказательствах общих теорем из второй части статьи.

В последнем параграфе исследуются различные возможные обобщения задачи факторизации оператор-функций относительно контура. В этом же параграфе подробно разбирается один поучительный пример.

*) Отметим, что все теоремы, сформулированные во введении, во всей общности доказываются лишь во второй части.

§ 1. Определения и вспомогательные предложения

В этом параграфе формулируются вспомогательные предложения и теоремы, играющие важную роль в доказательстве основных теорем. Начнем с некоторых определений.

1. Пусть по-прежнему Γ — линия в комплексной плоскости, состоящая из конечного числа непересекающихся замкнутых спрямляемых жордановых кривых. Будем предполагать, что контур Γ разбивает расширенную комплексную плоскость на два открытых множества F^+ и F^-, причем каждая точка Γ является граничной для F^+ и F^-. Предположим, что $0 \in F^+$ и $\infty \in F^-$. Открытую окрестность K контура Γ назовем *Γ-кольцом*, если 1) ее замыкание $\overline{K}$ состоит из того же числа связных компонент, что и Γ, причем каждая из этих компонент содержит точно одну компоненту контура Γ и гомеоморфна круговому кольцу; 2) граница ∂K состоит из конечного числа замкнутых спрямляемых жордановых кривых; 3) $0 \notin \overline{K}$, $\infty \notin \overline{K}$.

Пусть $\mathfrak{B}$ — банахово пространство, $L(\mathfrak{B})$ — алгебра всех линейных ограниченных операторов в $\mathfrak{B}$, а $GL(\mathfrak{B})$ — группа обратимых операторов из $L(\mathfrak{B})$.

Пусть K является Γ-кольцом. Обозначим через $C_\omega(K, \mathfrak{B})$ банахово пространство голоморфных в K и непрерывных на $\overline{K}$ вектор-функций $f: \overline{K} \to \mathfrak{B}$ с нормой

$$\|f\|_{C_\omega(K, \mathfrak{B})} \overset{\text{def}}{=} \max_{\zeta \in K} \|f(\zeta)\|_{\mathfrak{B}}.$$

Через $C_\omega^+(K, \mathfrak{B})$, обозначим подпространство функций из $C_\omega(K, \mathfrak{B})$, допускающих голоморфное продолжение в F^+, а через $C_\omega^-(K, \mathfrak{B})$ — подпространство функций из $C_\omega(K, \mathfrak{B})$, допускающих голоморфные продолжения в F^-, которые обращаются нуль на бесконечности. Легко видеть, что пространство $C_\omega(K, \mathfrak{B})$ распадается в прямую сумму его подпространств $C_\omega^+(K, \mathfrak{B})$ и $C_\omega^-(K, \mathfrak{B})$: $C_\omega(K, \mathfrak{B}) = C_\omega^+(K, \mathfrak{B}) \dotplus C_\omega^-(K, \mathfrak{B})$. Обозначим через $\mathbf{P}$ проектор, проектирующий пространство $C_\omega(K, \mathfrak{B})$ на $C_\omega^+(K, \mathfrak{B})$ на $C_\omega^+(K, \mathfrak{B})$ параллельно $C_\omega^-(K, \mathfrak{B})$, а через $\mathbf{Q}$ — дополнительный проектор $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P}$. Легко видеть, что проектор $\mathbf{P}$ выражается по формуле (0. 1).

Каждой оператор-функции $A: \overline{K} \to L(\mathfrak{B})$, непрерывной на $\overline{K}$ и голоморфной в K, сопоставим оператор $\mathbf{A}$, действующий в $C_\omega(K, \mathfrak{B})$ по формуле

$$(\mathbf{A}f)(\zeta) = A(\zeta) f(\zeta).$$

Операторы вида $\mathbf{PA}$ и $\mathbf{QA}$ будем рассматривать соответственно в пространствах $C_\omega^+(K, \mathfrak{B})$ и $C_\omega^-(K, \mathfrak{B})$.

Пусть оператор-функция $A: \overline{K} \to GL(\mathfrak{B})$ принадлежит $C_\omega(K, L(\mathfrak{B}))$. Если A допускает факторизацию относительно контура $\Gamma: A = A_- D A_+$, то легко видеть, что $A_+ \in C_\omega^+(K, L(\mathfrak{B}))$ и $A_- - A_-(\infty) \in C_\omega^-(K, (\mathfrak{B}))$.

Факторизация относительно контура Γ, в которой средний множитель тождественно равен единице, называется канонической.

2. В следующем параграфе существенно используется

Теорема 1. 1. *Оператор-функция* $A:\overline{K}\to GL(\mathfrak{B})$, *принадлежащая* $C_\omega(K, L(\mathfrak{B}))$, *допускает каноническую факторизацию относительно контура* Γ *в том и только том случае, когда оператор* **PA** *является обратимым в пространстве* $C_\omega^+(K, \mathfrak{B})$.

Эта теорема доказана в статье [8].

Оператор-функция A со значениями из $L(\mathfrak{B})$ называется *конечномероморфной в точке* ζ_0, если она либо голомрфна в ζ_0, либо имеет полюс в точке ζ_0 и в разложении

$$A(\zeta)=\sum_{j=-n}^{\infty}(\zeta-\zeta_0)^j A_j \qquad \left(A_j\in L(\mathfrak{B})\right)$$

все операторы $A_j\,(j=-n, \ldots, -1)$ конечномерны. Оператор-функция A называется *нормальной в точке* ζ_0, если она конечномероморфна в точке ζ_0, A_0 является Φ-оператором и $A(\zeta)\in GL(\mathfrak{B})$ для всех ζ из некоторого проколотого круга $0<|\zeta-\zeta_0|<\varepsilon$. Назовем оператор-функцию A *нормальной в точке* ∞, если оператор-функция $A(\zeta^{-1})$ нормальна в точке 0.

Как и в статье [6], условимся говорить, что непрерывная оператор-функция $A:\Gamma\to GL(\mathfrak{B})$ *вполне нормальна в* $F^+(F^-)$, если она допускает продолжение в $\Gamma\cup F^+(\Gamma\cup{}^-)$, непрерывное на Γ и нормальное во всех точках $F^+(F^-)$.

В доказательствах основных теорем существенную роль играет следующая теорема, доказанная в [6].

Теорема 1. 2. *Если оператор-функция* $A:\Gamma\to GL(\mathfrak{B})$ *допускает представление*

$$A=XY,$$

где X — *вполне нормальная оператор-функция в* F^+, *а* Y — *вполне нормальная оператор-функция в* F^-, *то она допускает факторизацию относительно контура* Γ.

Нам понадобится еще одно предложение, установленное в [9] (см. также [10], лемма 2. 1).

Предложение 1. 1. *Если оператор-функция* $A_\pm$ — *вполне нормальна в* $F^\pm$, *то оператор-функция* $A_\pm^{-1}$ *также вполне нормальна в* $F^\pm$.

3. Пусть K является Γ-кольцом. Обозначим через P проектор, проектирующий $C_\omega(K, L(\mathfrak{B}))$ на $C_\omega^+(K, L(\mathfrak{B}))$ параллельно $C_\omega^-(K, L(\mathfrak{B}))$, а через **Q** — дополнительный проектор $\mathbf{Q}=I-\mathbf{P}$.

Из общей теоремы (см. [11]. гл, , лемма 5. 1.), о факторизации элементов, близких к единичному, в абстрактных банаховых алгебрах вытекает следующая лемма.

Лемма 1. 1. *Любая оператор-функция* $A \in C_\omega(K, L(\mathfrak{B}))$, *удовлетворяющая условию*

$$\|A(\zeta)-I\|_{\mathfrak{B}} < \delta_K \overset{\text{def}}{=} \min\{\|\mathbf{P}\|^{-1}, \|\mathbf{Q}\|^{-1}\} \qquad (\zeta \in \overline{K})$$

допускает каноническую факторизацию относительно Γ.

В дальнейшем используется также следующая аппроксимационная лемма.

Лемма 1. 2. *Пусть* $\mathfrak{A}$ — *одно из пространств* $\mathfrak{B}$ *или* $L(\mathfrak{B})$. *Функции вида*

$$\sum_{j=1}^{n} r_j(\zeta)\, a_j \qquad (a_j \in \mathfrak{A}), \tag{1.1}$$

где r_j — *рациональные функции с полюсами вне* $\overline{K}$, *образуют плотное множество в* $C_\omega(K, \mathfrak{A})$.

В случае $\mathfrak{A} = L(\mathfrak{B})$ эта лемма по существу доказана в [8] (см. доказательство леммы 1. 1 главы 1). Это доказательство остается в силе также в случае $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.

Лемма 1. 3. *Пусть* Ω *некоторый компакт конечной комплексной плоскости и* $f\colon \Omega \to \mathfrak{B}$ — *голоморфная на* Ω *вектор-функция со свойством* $f(\zeta) \neq 0$ *для всех* $\zeta \in \Omega$.

Тогда существует голоморфная оператор-функция $N\colon \Omega \to GL(\mathfrak{B})$, *такая, что* $N(\zeta)f(\zeta) \equiv x\,(\zeta \in \Omega)$, *где* x — *некоторый фиксированный вектор из* $\mathfrak{B}$.

Эта лемма доказана в [7] (см. теорему 2. 3). Она также легко выводится из некоторых теорем о голоморфных расслоениях X. Рёрля [12] и X. Грауерта [13] (см. также [14]).

§ 2. Основная теорема о голоморфных оператор-функциях

1. В дальнейшем мы придерживаемся обозначений, введенных в первом параграфе. В частности, через K обозначается Γ — кольцо и через $\mathfrak{B}$ — банахово пространство. Основной в этом параграфе является следующая теорема.

Теорема 2. 1. *Пусть оператор-функция* $A\colon \overline{K} \to GL(\mathfrak{B})$ *голоморфна в* K *и непрерывна на* $\overline{K}$. *Для того чтобы оператор-функция* A *допускала факторизацию относительно* Γ, *необходимо и достаточно, чтобы оператор* **PA** *был* Φ-*оператором в пространстве* $C_\omega^+(K, \mathfrak{B})$.

Доказательство этой теоремы основывается на следующих двух леммах.

Лемма 2.1. *Пусть оператор-функция* $A:\overline{K}\to GL(\mathfrak{B})$ *голоморфна и пусть оператор* $\mathbf{PA}$ *является Ф-оператором.*

Если $\dim \operatorname{Coker} \mathbf{PA}>0$ *), *то существует голоморфная в* $\overline{K}$ *и вполне нормальная в* F^+ *оператор-функция* B_+, *принимающая всюду в* $\overline{K}$ *обратимые значения, такая, что оператор* $\mathbf{PAB}_+$ *является Ф-оператором в* $C_\omega^+(K, \mathfrak{B})$ *и*

$$\dim \operatorname{Coker} \mathbf{PAB}_+ < \dim \operatorname{Coker} \mathbf{PA}. \tag{2.1}$$

Лемма 2.2. *Пусть оператор-функция* $A:\overline{K}\to GL(\mathfrak{B})$ *голоморфна, и пусть оператор* $\mathbf{PA}$ *является Ф-оператором. Если* $\operatorname{Im} \mathbf{PA}=C_\omega^+(K, \mathfrak{B})$ *и* $\dim \operatorname{Ker} \mathbf{PA}>0$, *то существует голоморфная в* $\overline{K}$ *и вполне нормальная в* F^- *оператор-функция* B_-, *принимаящая всюду в* $\overline{K}$ *обратимые значения, такая, что*

$$\operatorname{Im} \mathbf{PB}_-\mathbf{A} = C_\omega^+(K, \mathfrak{B}) \tag{2.2}$$

и

$$\dim \operatorname{Ker} \mathbf{PB}_-\mathbf{A} < \dim \operatorname{Ker} \mathbf{PA}. \tag{2.3}$$

2. Доказательство леммы 2.1. Покажем сначала, что существует вектор $x\neq 0$ из $\mathfrak{B}$, такой, что $x\notin \operatorname{Im} \mathbf{PA}$. **)

Допустим противное, т. е. что

$$\mathfrak{B} \subseteqq \operatorname{Im} \mathbf{PA}. \tag{2.4}$$

Тогда для всех $z\in\mathfrak{B}$ и $k=0, 1, 2, \ldots$ будем иметь

$$\zeta^k z\in \operatorname{Im} \mathbf{PA}. \tag{2.5}$$

В самом деле, пусть для некоторого целого неотрицательного k функция $\zeta^k z\in \operatorname{Im} \mathbf{PA}$, т. е. существуют вектор-функции $f_+\in C_\omega^+(K, \mathfrak{B})$ и $f_-\in (K, \mathfrak{B})$, удовлетворяющие равенству

$$\zeta^k z+f_-(\zeta) = A(\zeta)f_+(\zeta) \qquad (\zeta\in\overline{K}).$$

Тогда

$$\zeta^{k+1}z+\mathbf{P}[\zeta f_-(\zeta)] = \mathbf{P}[A(\zeta)\zeta f_+(\zeta)]\in \operatorname{Im} \mathbf{PA},$$

Так как

$$\mathbf{P}[\zeta f_-(\zeta)] = \zeta f_-(\zeta)_{\zeta=\infty}\in \operatorname{Im} \mathbf{PA},$$

то $\zeta^{k+1}z\in \operatorname{Im}\ \mathbf{PA}$.

Покажем теперь, что

$$\frac{z}{(\zeta-\alpha)^k}\in \operatorname{Im} \mathbf{PA} \qquad (k=1, 2, \ldots) \tag{2.6}$$

---

*) Напомним, что $\operatorname{Coker} \mathbf{PA} \overset{\mathrm{def}}{=} C_\omega^+(K, \mathfrak{B})/\operatorname{Im} \mathbf{PA}$.

**) Здесь и в дальнейшем под x понимаем вектор-функцию на $\overline{K}$ равную тождественно фиксированному вектору x.

для всех $z \in \mathfrak{B}$ и $\alpha \in F^- \setminus \bar{K}$ ($\neq 0$). В силу соотношения $\dim \operatorname{Coker} \mathbf{PA} < \infty$ существуют числа $\beta_1, \ldots, \beta_n$ ($\beta_n \neq 0$), такие, что

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j \frac{z}{(\zeta-\alpha)^{k_j}} \in \operatorname{Im} \mathbf{PA}.$$

Последнее означает, что

$$f_-(\zeta) + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \frac{z}{(\zeta-\alpha)^{k_j}} = A(\zeta) f_+(\zeta),$$

где $f_\pm \in C_\omega^\pm(K, \mathfrak{B})$. Следовательно,

$$\mathbf{P}[(\zeta-\alpha)^{k(n-1)} f_-(\zeta)] + \sum_{j=1}^{n-1} \beta^j (\zeta-\alpha)^{k(n-1-j)} z + \beta_n \frac{z}{(\zeta-\alpha)^k} =$$
$$= \mathbf{P}[A(\zeta)(\zeta-\alpha)^{k(n-1)} f_+(\zeta)] \in \operatorname{Im} \mathbf{PA}.$$

Так как $\beta_n \neq 0$, то отсюда в силу (2. 5) вытекает соотношение (2. 6).

Из (2. 5) и (2. 6) следует, что все функции (1. 1) принадлежат пространству $\operatorname{Im} \mathbf{PA}$. В силу леммы 1. 2 это означает, что $\operatorname{Im} \mathbf{PA} = C_\omega^+(K, \mathfrak{B})$. Последнее противоречит условию $\dim \operatorname{Coker} \mathbf{PA} > 0$.

Выберем вектор x из $\mathfrak{B}$ так, чтобы он не принадлежал множеству значений оператора $\mathbf{PA}$. Так как $\dim \operatorname{Coker} \mathbf{PA} < \infty$, то можно подобрать скалярный многочлен

$$\varphi_+(\zeta) = \sum_{j=1}^{n} \zeta^j \alpha_j$$

с $\alpha_n \neq 0$ так, чтобы вектор-функция $\varphi_+(\zeta)$ ($\zeta \in \bar{K}$) принадлежала пространству $\mathbf{PA}$. Это означает, что имеет место равенство

(2.7) $$A(\zeta) f_+(\zeta) = \varphi_+(\zeta) x + f_-(\zeta),$$

где $f_\pm \in C_\omega^\pm(K, \mathfrak{B})$.

Так как оператор-функция A^{-1} голоморфна на замкнутом кольце $\bar{K}$, то из равенства (2. 7) следует, что вектор-функция f_+ голоморфна на замкнутом множестве $F^+ \cup \bar{K}$. Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ — все нули вектор-функции f_+ из множества $F^+ \cup \bar{K}$. Положим

(2. 8) $$\tilde{f}_+(\zeta) = \sum_{j=1}^{k} (\zeta-\zeta_j)^{-1} f_+(\zeta).$$

Вектор-функция $\tilde{f}_+$ голоморфна на $F^+ \cup \bar{K}$ и $\tilde{f}_+(\zeta) \neq 0$ ($\zeta \in F^+ \cup K$). Следовательно, в силу леммы 1. 3 существует голоморфная операторфункция $N_+ : F^+ \cup \bar{K} \to GL(\mathfrak{B})$, такая, что

(2. 9) $$N_+^{-1}(\zeta) \tilde{f}_+(\zeta) \equiv y \quad (\zeta \in F^+ \cup \bar{K}),$$

где y — некоторый вектор из $\mathfrak{B}$.

Пусть R — проектор, проектирующий пространство $\mathfrak{B}$ на одномерное пространство, порожденное вектором y. Рассмотрим оператор-функцию $R_+(\zeta) = I - R + \zeta^{-n}R$. Так как оператор-функция $R_+^{-1}(\zeta) = I + \zeta^n R$ принадлежит $C_\omega^+(K, L(\mathfrak{B}))$, то оператор $\mathbf{PR}_+^{-1}$ является обратным справа к оператору $\mathbf{PR}_+$. С другой стороны, для любого вектора f из $C_\omega^+(K, \mathfrak{B})$ имеет место равенство

$$(\mathbf{PR}_+^{-1}\mathbf{PR}_+ f)(\zeta) = f(\zeta) + \zeta^n \mathbf{P}\big(\zeta^{-n} Rf(\zeta)\big) - Rf(\zeta).$$

Легко видеть, что

$$\zeta^n \mathbf{P}\big(\zeta^{+n} Rf(\zeta) - Rf(\zeta)\big) = \sum_{j=0}^{n-1} \zeta^j Rf_j,$$

где f_j — коэффициенты Тейлора функции $f(\zeta)$ в точке $\zeta = 0$. Из последнего равенства вытекает, что $\dim \operatorname{Im} (\mathbf{PR}_+^{-1}\mathbf{PR}_+ - \mathbf{P}) = n$.

Таким образом, оператор $\mathbf{PR}_+$ является Φ-оператором.

Положим $B_+(\zeta) = N_+(\zeta) R_+(\zeta)$. Легко видеть, что оператор-функция B_+ голоморфна в $\bar{K}$ и вполне нормальна в F^+. Все значения $B_+(\zeta)$ при $\zeta \in (\bar{K} \cup F^+) \setminus \{0\}$ являются обратимыми операторами. Покажем, что оператор $\mathbf{PAB}_+$ является Φ-оператором. Без труда проверяются равенства $\mathbf{PAN}_+ = (\mathbf{PA})(\mathbf{PN}_+)$ и $(\mathbf{PN}_+^{-1})(\mathbf{PN}_+) = (\mathbf{PN}_+)(\mathbf{PN}_+^{-1}) = \mathbf{P}$. Следовательно, оператор $\mathbf{PAN}_+$ является Φ-оператором и $\operatorname{Im} \mathbf{PAN}_+ = \operatorname{Im} \mathbf{PA}$.

Оператор $(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{R}_+\mathbf{P}$ конечномерен, так как

$$((\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{R}_+ f)(\zeta) = (\mathbf{I} - \mathbf{P})(\zeta^{-n} Rf(\zeta)) = \sum_{j=0}^{n} \zeta^{-j} Rf_j,$$

где f_j — коэффициенты Тейлора функции f в точке $\zeta = 0$.

Из равенства

$$\mathbf{PAB}_+ = \mathbf{P}(\mathbf{AN}_+)\mathbf{PR}_+ + \mathbf{PAN}_+(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{R}_+$$

в силу доказанного вытекает, что $\mathbf{PAB}_+$ является Φ — оператором. Перейдем к доказательству неравенства (2. 1).

Пусть g_+ — любая функция из $\operatorname{Im} \mathbf{PA}$ $(= \operatorname{Im} \mathbf{PAN}_+)$. Тогда для некоторого вектора $h_+ \in C_\omega^+(K, \mathfrak{B})$ будет иметь место равенство $g_+ = \mathbf{PAN}_+ h_+$.

Полагая

$$\tilde{h}^+(\zeta) = (I - R + \zeta^n R) h_+(\zeta)$$

получим

$$\mathbf{PAB}_+ \tilde{h}_+ = \mathbf{PAN}_+ h_+ = g_+,$$

т. е. $g_+ \in \operatorname{Im} PAB_+$. Таким образом,

$$\operatorname{Im} \mathbf{PA} \subseteqq \operatorname{Im} \mathbf{PAB}_+ \tag{2. 10}$$

Рассмотрим функцию

$$v_+(\zeta) = \sum_{j=1}^{k} (\zeta - \zeta_j) y.$$

Из равенств (2. 9) и (2. 8) вытекает, что

$$B_+(\zeta)v_+(\zeta) = \zeta^{-n}\sum_{j=1}^{k}(\zeta-\zeta_j)N_+(\zeta)y = \zeta^{-n}f_+(\zeta).$$

Следовательно, в силу (2. 7) будем иметь

$$\mathbf{P}[A(\zeta)B_+(\zeta)v_+(\zeta)] = \mathbf{P}[\zeta^{-n}\varphi_+(\zeta)x+\zeta^{-n}f_-(\zeta)] = \alpha_n x,$$

где комплексное число $\alpha_n \neq 0$. Стало быть,

$$x \in \operatorname{Im}\mathbf{PAB}_+. \tag{2.11}$$

Так как вектор x не принадлежит $\operatorname{Im}\mathbf{PA}$, то из соотношений (2. 10) и (2. 11) непосредственно вытекает неравенство (2. 1).

Лемма доказана.

3. Доказательство леммы 2. 2. Пусть f_+ $(\neq 0)$ — некоторая вектор-функция из $\operatorname{Ker}\mathbf{PA}$. Тогда

$$A(\xi)f_+(\zeta) = f_-(\zeta) \qquad (\zeta \in \overline{K}), \tag{2.12}$$

где $f_- \in C_\omega^-(K, \mathfrak{B})$. Так как оператор-функция $A:\overline{K}\to GL(\mathfrak{B})$ голоморфна на $\overline{K}$, то из (2. 12) следует, что вектор-функция f_- допускает голоморфное продолжение на $F^-\cup\overline{K}$. Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ — все числа из множества $(F^-\cup\overline{K})\setminus\{\infty\}$, являющиеся нулями функции f_-, и s — порядок нуля функции f_- на бесконечности. Положим

$$\tilde{f}_-(\zeta) = \zeta^s\sum_{j=1}^{m}(\zeta-\zeta_j)^{-1}f_-(\zeta).$$

Вектор-функция $\tilde{f}_-$ голоморфна на $F^-\cup\overline{K}$ и $\tilde{f}(\zeta)\neq 0$ $(\zeta\in F^-\cup\overline{K})$. Следовательно, в силу леммы 1. 3 существует голоморфная оператор-функция $N_-: F^-\cup\overline{K}\to GL(\mathfrak{B})$, такая, что

$$N_-(\zeta)\tilde{f}_-(\zeta) \equiv y \qquad (\zeta\in F^-\cup\overline{K}), \tag{2.13}$$

где $y\neq 0$ — некоторый постоянный вектор из $\mathfrak{B}$.

Положим

$$\tilde{f}_+(\zeta) = \sum_{j=1}^{m}(\zeta-\zeta_j)^{-1}f_+(\zeta).$$

Из равенства (2. 12) следует, что вектор-функция f_+ голоморфна на $\overline{K}\cup F^+$ и что f_+ и f_- на множестве $\overline{K}$ имеют один и те же нули. Следовательно, вектор-функция $\tilde{f}_+$ голоморфна на $F^+\cup\overline{K}$. Из равенства (2. 12) также следует, что

$$A(\zeta)\tilde{f}_+(\zeta) = \zeta^{-s}\tilde{f}_-(\zeta). \tag{2.14}$$

Пусть R — проектор, проектирующий пространство $\mathfrak{B}$ на одномерное пространство, порожденное вектором y. Положим

$$B_-(\zeta) = R_-(\zeta)N_-(\zeta),$$

где $R_-(\zeta)=I-R+\zeta^s R$, и покажем, что $\mathbf{PB_-A}$ является Φ-оператором в пространстве $C_\omega^+(K, \mathfrak{B})$. Это утверждение будем доказывать так же, как подобное утверждение в лемме 2. 1. В процессе доказательства леммы 2. 1, в частности, показано, что оператор $\mathbf{PR_-}$ является Φ-оператором.

Без труда проверяются равенства $\mathbf{PN_-A}=(\mathbf{PN_-})(\mathbf{PA})$ и $(\mathbf{PN_-^{-1}})(\mathbf{PN_-})= =(\mathbf{PN_-})(\mathbf{PN_-^{-1}})=\mathbf{P}$. Следовательно, оператор $\mathbf{PN_-A}$ является Φ-оператором и $\operatorname{Ker}\mathbf{PN_-A}=\operatorname{Ker}\mathbf{PA}$.

Оператор $\mathbf{PR_-(I-P)}: C_\omega(K, \mathfrak{B}) \to C_\omega^+(K, \mathfrak{B})$ конечномерен, так как

$$(\mathbf{PR_-(I-P)}f)(\zeta) = \mathbf{P}\big(\zeta^S R(\mathbf{I}-\mathbf{P})f(\zeta)\big) = Rf_S+\zeta Rf_{S-1}+\dots+\zeta^{S-1}Rf_1$$

где $f_1, f_2, \dots$ — коэффициенты Тейлора функции $f(\zeta^{-1})$ в точке $\zeta=0$.

Из равенства

$$\mathbf{PB_-A} = \mathbf{PR_-PN_-A}+\mathbf{PR_-(I-P)N_-A}$$

вытекает, что $\mathbf{PB_-A}$ является Φ-оператором.

Докажем теперь соотношение (2. 2). Отметим сначала, что все вектор-функции вида $\varphi_+(\zeta)y$ из $C_\omega^+(K, \mathfrak{B})$, где φ_+ — скалярная функция, принадлежат пространству $\operatorname{Im}\mathbf{PB_-A}$. А самом деле, в силу равенств (2. 13) и (2. 14) для функции $\varphi_+\tilde{f}_+ \in C_\omega^+(K, \mathfrak{B})$ имеют место равенства

$$\mathbf{P}[B_-(\zeta)A(\zeta)\varphi_+(\zeta)\tilde{f}_+(\zeta)] = \mathbf{P}[B_-(\zeta)\varphi_+(\zeta)\zeta^{-S}\tilde{f}_-(\zeta)] =$$

$$= \mathbf{P}[(I-R+\zeta^S R)\varphi_+(\zeta)\zeta^{-S}y] = \mathbf{P}[\varphi^+(\zeta)y] = \varphi_+(\zeta)y.$$

Пусть тепрь g_+ — любая вектор-функция из $C_\omega^+(K, \mathfrak{B})=\operatorname{Im}\mathbf{PN_-A}$. Тогда существуют функции $h_\pm \in C_\omega^\pm(K, \mathfrak{B})$ такие, что

$$\mathbf{N_-A}h_+ = g_+ + h_-. \tag{2.15}$$

Имеет место равенство

$$\mathbf{P}\big[B_-(\zeta)A(\zeta)h_+(\zeta)] = \mathbf{P}[(I-R+\zeta^S R)\big(g_+(\zeta)+h_-(\zeta)\big)\big] =$$

$$= g_+(\zeta)-Rg_+(\zeta)+w_+(\zeta),$$

где $w_+(\zeta) = \mathbf{P}[\zeta^s R\big(g_+(\zeta)+h_-(\zeta)\big)]$. Вектор-функции $Rg_+(\zeta)$ и $w_+(\zeta)$ имеют вид $\varphi_+(\zeta)y$, где φ_+ — скалярные функции. Следовательно, они принадлежат подпространству $\operatorname{Im}\mathbf{PB_-A}$. Отсюда вытекает, что и вектор $g_+ \in \operatorname{Im}\mathbf{PB_-A}$. Таким образом, $C_\omega^+(K' \mathfrak{B})=\operatorname{Im}\mathbf{PB_-A}$.

Докажем теперь соотношения

$$\text{(2. 16)} \qquad \operatorname{Ker} \mathbf{PB_-A} \subsetneqq \operatorname{Ker} \mathbf{PA}$$

и

$$\text{(2. 17)} \qquad \tilde{f}_+ \in \operatorname{Ker} \mathbf{PA} / \operatorname{Ker} \mathbf{PB_-A},$$

из которых будет вытекать неравенство (2. 3).

Пусть g_+ — любая вектор-функция из подпространства $\operatorname{Ker} \mathbf{PB_-A}$, т. е. $g_- \overset{\text{def}}{=} \mathbf{B_-A}g_+ \in C_\omega^-(K, \mathfrak{B})$. Тогда

$$A(\zeta)g_+(\zeta) = N_-^{-1}(\zeta)(I-R+\zeta^{-S}R)g_-(\zeta) \in C_\omega^-(K, \mathfrak{B}),$$

т. е. $g_+ \in \operatorname{Ker} \mathbf{PA}$.

Соотношение $\tilde{f}_+ \in \operatorname{Ker} \mathbf{PA}$ следует из равенства (2. 14). В силу равенств (2. 14) и (2. 13) получаем

$$\mathbf{P}[B_-(\zeta)A(\zeta)\tilde{f}_+(\zeta)] = \mathbf{P}[(I-R+\zeta^S R)N_-(\zeta)\zeta^{-S}\tilde{f}_-(\zeta)] =$$
$$= \mathbf{P}[(I-R+\zeta^S R)\zeta^S y] = y \neq 0.$$

Следовательно, $\tilde{f}_+ \notin \operatorname{Ker} \mathbf{PB_-A}$.

Лемма доказана.

4. Доказательству теоремы 2. 1 предпошлем еще одну лемму, позволяющую допилнительно предполагать, что оператор-функция $A(\zeta)$ голоморфна на $\overline{K}$.

Лемма 2. 3. *Пусть оператор-функция $A: \overline{K} \to GL(\mathfrak{B})$ голоморфна в K* а *непрерывна на $\overline{K}$. Тогда существуют оператор-функция $E_+: \overline{K} \cup F^+ \to GL(\mathfrak{B})$ голоморфная в $K \cup F^+$ и непрерывная на $\overline{K} \cup F^+$, и оператор-функция $E_-: \overline{K} \cup \cup F^- \to GL(\mathfrak{B})$, голоморфная в $K \cup F^-$ и непрерывная на $\overline{K} \cup F^-$, такие, что оператор-функция $E_- A E_+$ — голоморфна на $\overline{K}$.*

Доказательство. Обозначим через δ_K константу из леммы 1. 1. В силу леммы 1. 2 оператор-функцию можно представить в виде $A = (I+M)G$, где $M, G \in C_\omega(K, L(\mathfrak{B}))$, причем $\|M\|_{C_\omega(K, L(\mathfrak{B}))} < \delta_K$ и оператор-функция G голоморфна на $\overline{K}$. В силу леммы 1. 1 оператор-функция $I+M$ допускает каноническую факторизацию $I+M = X_- X_+$ относительно контура Γ. Оператор-функция $X_+ G$, очевидно, голоморфна на $\overline{K} \cap (K \cup F^+)$. С помощью леммы 1. 2 оператор-функцию $X_+ G$ также можно представить в виде $X_+ G = H(I+N)$, где H голоморфна на $\overline{K}$ и $\|N\|_{C_\omega(K, L(\mathfrak{B}))} < \delta_K$. Легко видеть, что оператор-функция N голоморфна на $\overline{K} \cap (K \cup F^+)$. В силу леммы 1. 1 оператор-функция $I+N$ допускает каноническую факторизацию $I+N = Y_- Y_+$ относительно Γ. Легко видеть, что оператор-функция Y_- голоморфна на $\overline{K} \cap (K \cup F^+)$ и, следовательно, она голоморфна на $\overline{K} \cup F^-$. Таким образом, $X_-^{-1} A Y_+^{-1} = H Y_-$, причем оператор-функция HY_- голоморфна $\overline{K}$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. 1. Легко видеть, что условие теоремы является необходимым (см., например, доказательство теоремы 6. 1). Покажем его достаточность. Пусть оператор **PA** является Φ — оператором в $C_\omega^+(K, \mathfrak{B})$ и $E_\pm$ — оператор-функции из леммы 2. 3. Так как операторы $\mathbf{PE}_\pm$ обратимы в $C_\omega^+(K, \mathfrak{B})$ $((\mathbf{PE}_\pm)^{-1} = \mathbf{PE}_\pm^{-1})$, то оператор $\mathbf{PE}_-\mathbf{AE}_+$ также является Φ — оператором в $C_\omega^+(K, \mathfrak{B})$. Оператор-функция E_-AE_+ голоморфна на $\bar{K}$. Применяя к ней последовательно несколько раз лемму 2. 1 и затем лемму 2. 2, получим голоморфные оператор-функции B_- и $B_+:\bar{K}\to GL(\mathfrak{B})$, допускающие вполне нормальные расширения соответственно в F^- и F^+, такие, что оператор $\mathbf{PB}_-\mathbf{E}_-\mathbf{AE}_+\mathbf{B}_+$ обратим в пространстве $C_\omega^+(K, \mathfrak{B})$.

Из теоремы 1. 1 вытекает, что оператор-функция $B_-E_-AE_+B_+$ допускает каноническую факторизацию $B_-E_-AE_+B_+ = G_-G_+$ относительно контура Γ. Таким образом, для оператор-функции A получаем представление

$$A = (E_-^{-1}B_-^{-1}G_-)(G_+B_+^{-1}E_+^{-1}).$$

Согласно предложению 1. 1 оператор-функции $E_-^{-1}B_-^{-1}G_-$ и $G_+B_+^{-1}E_+^{-1}$ вполне нормальны соотвтственно в F^- и F^+. Отсюда в сулу теоремы 1. 2 следует, что оператор-функция A допускает факторизацию.

Теорема доказана.

5. Сделаем два замечания. Пусть $K-\Gamma$ — кольцо и оператор-функция $A:\bar{K}\to GL(\mathfrak{B})$ принадлежит $C_\omega(K, L(\mathfrak{B}))$. Тогда легко проверить, что имеет место равенство

$$\mathbf{Q}+\mathbf{PAP} = \mathbf{A}(\mathbf{P}+\mathbf{QA}^{-1}\mathbf{Q})(\mathbf{I}+\mathbf{PA}^{-1}\mathbf{Q})(\mathbf{I}-\mathbf{QAP}).$$

Так как операторы $\mathbf{A}$, $\mathbf{I}+\mathbf{PA}^{-1}\mathbf{Q}$ и $\mathbf{I}-\mathbf{QAP}$ обратимы, то отсюда следует, что оператор **PA** является Φ-оператором в $C_\omega^+(K, \mathfrak{B})$ в том и только том случае, когда оператор $\mathbf{QA}^{-1}$ является Φ-оператором в $C_\omega^-(K, \mathfrak{B})$. При этом

$$\dim\operatorname{Ker}\mathbf{PA} = \dim\operatorname{Ker}\mathbf{QA}^{-1} \text{ и } \dim\operatorname{Coker}\mathbf{PA} = \dim\operatorname{Coker}\mathbf{QA}^{-1}.$$

Следовательно, в формулировке, теоремы 2. 1 оператор **PA** можно заменить оператором $\mathbf{QA}^{-1}$. Отметим еще, что если в предположениях этого предложения оператор-функция A допускает факторизацию $A = A_-DA_+$ относительно Γ, то, как легко видеть, имеют место равенства

$$\dim\operatorname{Ker}\mathbf{PA} = \dim\operatorname{Ker}\mathbf{QA}^{-1} = \dim\operatorname{Ker}\mathbf{D} = \sum_{\varkappa_j<0}\varkappa_j$$

и

$$\dim\operatorname{Coker}\mathbf{PA} = \dim\operatorname{Coker}\mathbf{QA}^{-1} = \dim\operatorname{Coker}\mathbf{D} = \sum_{\varkappa_j>0}\varkappa_j,$$

где $\varkappa_j$ — все частные индексы оператор-функции A.

§ 3. Обобщенная факторизация оператор-функций относительно контура

1. Пусть оператор-функция $A:\Gamma\to GL(\mathfrak{B})$ имеет вид

$$A(\zeta) = \sum_{j=-m}^{n} \zeta^j A_j, \tag{3.1}$$

где $A_j \in L(\mathfrak{B})$. Не всякая такая оператор-функция допускает факторизацию относительно контура Γ. В этом можно убедиться на примере $A_0(\zeta)=\zeta I$.

Рассмотрим менее жесткое понятие факторизации, определяемое следующим образом. *Обобщенной факторизацией* оператор-функции $A:\Gamma\to GL(\mathfrak{B})$ относительно контура Γ назовем ее представление в виде

$$A = A_- D A_+,$$

где оператор-функция $A_\pm:\bar{F}^\pm\to GL(\mathfrak{B})$ непрерывна $\bar{F}^\pm$ и голоморфна в $F^\pm$, а оператор-функция D имеет вид

$$D(\zeta) = \sum_{j=0}^{n} \zeta^{\varkappa_j} P_j,$$

где $P_1, \ldots, P_n$ — попарно дизъюнктные (т. е. $P_jP_k=0$ при $j\neq k$) проекторы из $L(\mathfrak{B})$, для которых $\sum P_j = I$.

В отличие от обычной факторизации в определении обобщенной факторизации не накладываются никакие ограничения на размерности проекторов P_j и на целые числа $\varkappa_j$ ($j=0, 1, \ldots, n$).

Как будет показано ниже, приведенное новое определение еще не является достаточно общим. Оказывается, что не всякая оператор-функция вида (3.1) допускает обобщенную факторизацию. Это будет доказано с помощью специального примера. Сперва установим одно необходимое условие для того, чтобы оператор-функция допускала обобщенную факторизацию.

Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство и $\mathbf{P}$ — проектор, проектирующий $\mathbf{L}_2(\Gamma,\mathfrak{H})$ на $\mathbf{L}_2^+(\Gamma,\mathfrak{H})$ параллельно $\mathbf{L}_2^-(\Gamma,\mathfrak{H})$*).

Предложение 3.1. *Для того чтобы непрерывная оператор-функция $A:\Gamma\to GL(\mathfrak{H})$ допускала обобщенную факторизацию относительно Γ, необходимо, чтобы оператор $\mathbf{PA}$ имел замкнутое множество значений в $\mathbf{L}_2^+(\Gamma,\mathfrak{H})$, т. е. он был нормально разрешим в $\mathbf{L}_2^+(\Gamma,\mathfrak{H})$.*

В самом деле, предположим, что оператор-функцию $A(\zeta)$ допускает обобщенную факторизацию $A=A_-DA_+$, тогда будем иметь $\mathbf{PA}=(\mathbf{PA}_-)(\mathbf{PD})(\mathbf{PA}_+)$.

---

*) Через $\mathbf{L}_2^+(\Gamma,\mathfrak{H})$ ($\mathbf{L}_2^-(\Gamma,\mathfrak{H})$) обозначается замыкание множества голоморфных функций $f:F^+\to\mathfrak{H}$ ($f:F^-\to\mathfrak{H}$, обращающиеся в нуль на бесконечности). Нетрудно показать (подробно это сделано в [8]), что $\mathbf{L}_2(\Gamma,\mathfrak{H}) = \mathbf{L}_2^+(\Gamma,\mathfrak{H}) \dotplus \mathbf{L}_2^-(\Gamma,\mathfrak{H})$.

Операторы $\mathbf{PA}_{\pm}$ обратимы, причем $(\mathbf{PA}_{\pm})^{-1}=\mathbf{PA}_{\pm}^{-1}$. Оператор $\mathbf{PD}$, очевидно, распадается в прямую сумму односторонне обратимых операторов. Следовательно, оператор $\mathbf{PD}$, а вместе с ним и оператор $\mathbf{PA}$ имеют замкнутые множества значений.

2. Пусть Γ_0 — единичная окружность и $S=[0, 1]$ — единичный интервал. Рассмотрим гильбертово пространство $L_2^2(S)=L_2(S)\oplus L_2(S)$ двумерных вектор-функций с координатами из $L_2(S)$ и оператор-функцию $B\colon\Gamma_0\to L\big((L_2^2(S)\big)$, определенную равенством

$$B(\zeta) = \zeta^{-1}\beta_{-1}+B_0+\zeta B_1 \tag{3.2}$$

где $B_{-1}, B_0, B_1\in L\big(L_2^2(S)\big)$ — операторы умножения соответственно на матрицы-функции

$$\begin{pmatrix} 0 & 0\\ t & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t-1 & 0\\ 0 & t+1\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & t\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad (t\in S).$$

Так как

$$\det\begin{pmatrix} t-1 & \zeta t\\ \zeta^{-1}t & t+1\end{pmatrix}\equiv -1 \qquad (\zeta\in\Gamma_0, t\in S),$$

то $B(\zeta)\in GL\big(L_2^2(S)\big)$, для всех $\zeta\in\Gamma_0$.

Предложение 3.2. *Оператор-функция B не допускает обобщенную факторизацию.*

Действительно, рассмотрим пространство $\mathbf{L}_2\big(\Gamma_0, L_2^2(S)\big)$ и оператор $\mathbf{PB}$ в $\mathbf{L}_2^+\big(\Gamma_0, L_2^2(S)\big)$. Согласно предпожению 3.1 достаточно показать, что оператор $\mathbf{PB}$ не является нормально разрешимым.

Обозначим через $L_2^2(\Gamma_0)\,\big(=L_2(\Gamma_0)\oplus L_2(\Gamma_0)\big)$ гильбертово пространство двумерных вектор-функций с координатами из $L_2(\Gamma_0)$. Как известно, пространство $L_2(\Gamma_0)$ является распадающимся: $L_2(\Gamma_0)=L_2^+(\Gamma_0)\oplus L_2^-(\Gamma_0)$. Следовательно, $L_2^2(\Gamma_0)={}^+L_2^2(\Gamma_0)\oplus{}^-L_2^2(\Gamma_0)$, где ${}^{\pm}L_2^2(\Gamma_0)=L_2^{\pm}(\Gamma_0)\oplus L_2^{\pm}(\Gamma_0)$. Пусть P_2 — проектор, проектирующий $L_2^2(\Gamma_0)$ на ${}^+L_2^2(\Gamma_0)$ параллельно ${}^-L_2^2(\Gamma_0)$. Пространство $\mathbf{L}_2^+\big(\Gamma_0, L_2^2(S)\big)$ можно естественным образом отождествить с пространством $\mathbf{L}_2\big(S, {}^+L_2^2(\Gamma_0)\big)$. Обозначим через $G_t(t\in S)$ оператор умножения на матрицу-функцию

$$G_t(\zeta) = \begin{pmatrix} t-1 & \zeta t\\ \zeta^{-1}t & t+1\end{pmatrix} \qquad (\zeta\in\Gamma_0),$$

действующий в пространстве $L_2^2(\Gamma_0)$, а через $\mathbf{V}$ — оператор умножения на оператор-функцию $P_2G_t(t\in S)$, действующий в пространстве $\mathbf{L}_2\big(S, {}^+L_2^2(\Gamma_0)\big)$.

Легко видеть, что оператор $\mathbf{PB}$, рассматриваемый в пространстве $\mathbf{L}_2\big(S, {}^+L_2^2(\Gamma_0)\big)$, совпадает с оператором $\mathbf{V}$. Поэтому осталось показать, что оператор $\mathbf{V}$ не является нормально разрешимым.

Для всех $t\in S\setminus\{1\}$ матрица-функция $G_t(\zeta)$ $(\zeta\in\Gamma_0)$ допускает каноническую факторизацию относительно Γ:

$$G_t(\zeta)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \dfrac{-t}{\zeta(t-t)} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t-1 & \zeta t\\ 0 & \dfrac{1}{1-t}\end{pmatrix}.$$

Таким образом, операторы P_2G_t обратимы в ${}^+L_2^2(\Gamma_0)$ для всех $t\in S\setminus\{1\}$. Отсюда, в частности, вытекает, что $\operatorname{Ker}\mathbf{V}=\{0\}$.

С другой стороны,

$$G_1(\zeta)=\begin{pmatrix}0 & \zeta\\ \zeta^{-1} & 2\end{pmatrix}.$$

Следовательно, вектор $(1,0)\in{}^+L_2^2(\Gamma_0)$ принадлежит ядру оператора P_2G_1. Учитывая непрерывность оператор-функции $P_2G_t(t\in S)$, отсюда легко получить последовательность вектор-функций $f_n\in\mathbf{L}_2(S,{}^+L_2^2(\Gamma_0))$, таких, что $\|f_n\|_{\mathbf{L}_2}=1$, а $\|\mathbf{V}f_n\|_{\mathbf{L}_2}\leqq 1/n$. Вместе с равенством $\operatorname{Ker}\mathbf{V}=\{0\}$ это противоречит нормальной разрешимости оператора $\mathbf{V}$.

Предложение доказано.

3. Как показано в предложении 3. 1, нормальная разрешимость оператора $\mathbf{PA}$ в пространстве $L_2^+(\Gamma,\mathfrak{H})$ является необходимым условием для существования обобщенной факторизации любой оператор-функции $A:\Gamma\to GL(\mathfrak{H})$ вида (3. 1). Оказывается, что это условие не является достаточным. В самом деле, рассмотрим оператор-функцию

$$\tilde{B}(\zeta)=\zeta B(\zeta)(\zeta\in\Gamma_0),$$

где B — оператор-функция (3. 2).

Так как оператор-функция B не допускает обобщенную факторизацию относительно Γ_0, то $\tilde{B}$ также ее не допускает. Но оператор $\mathbf{P}\tilde{\mathbf{B}}$ обратим слева, так как оператор-функция $\tilde{B}$ голоморфна внутри окружности Γ_0 и, следовательно, $(\mathbf{P}\tilde{\mathbf{B}}^{-1})(\mathbf{P}\tilde{\mathbf{B}})=\mathbf{P}\tilde{\mathbf{B}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}=\mathbf{P}$.

4. Если в определении обобщенной факторизации средний множитель D отнести к множителю A_-, то мы приходим к следующему дальнейшему обобщению понятия факторизации.

Неполной факторизацией непрерывной оператор-функции $A:\Gamma\to GL(\mathfrak{B})$ назовем ее представление в виде

$$A=\tilde{A}_-A_+,$$

где оператор-функция $A_+:\bar{F}^+\to GL(\mathfrak{B})$ непрерывна на $\bar{F}^+$ и голоморфна в F^+, а оператор-функция $\tilde{A}_-:\bar{F}^-\setminus\{\infty\}\to GL(\mathfrak{B})$ непрерывна на $\bar{F}^-\setminus\{\infty\}$ и голоморфна в $F^-\setminus\{\infty\}$.

Оказывается, что любую оператор-функцию $A:\Gamma\to GL(\mathfrak{B})$ вида (3. 1) можно неполно факторизовать. Более того, имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1. *Любая голоморфная оператор-функция $A: \Gamma \to GL(\mathfrak{B})$ допускает неполную факторизацию.*

Эта теорема вытекает из более общего результата Л. Бунгарта [15] о том, что любое голоморфное расслоенное пространство со структурной группой $GL(\mathfrak{B})$ и базисом $\mathbf{C}^1$ является тривиальным.

Элементарное доказательство этой теоремы содержится в статье авторов [16].

Цитированная литература

[1] И. Ц. Гохберг, Задача факторизации оператор-функций, *Известия АН СССР, серия матем.*, **28:5** (1964), 1055—1082.

[2] И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, *Усп. матем. наук*, **12:2** (1957), 44—118.

[3] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения* (Москва, 1968).

[4] М. С. Будяну и И. Ц. Гохберг, Общие теоремы о факторизации матриц-функций. II. Некоторые признаки и их следствия, *Матем. исследования*, **3:3** (Кишинев, 1968), 3—18.

[5] И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, *Усп. матем. наук*, **13:2** (1958), 3—72.

[6] И. Ц. Гохберг и Ю. Лайтерер, Факторизация оператор-функций относительно контура. I. Конечномероморфные оператор-функции, *Math. Nachrichten*, **52:1—6** (1972), 259—282.

[7] И. Ц. Гохберг и Ю. Лайтерер, О голоморфных вектор-функциях одного переменного. I. Функции на компакте, *Матем. исследования*, **7:4** (Кишинев, 1972), 60—84.

[8] И. Ц. Гохберг и Ю. Лайтерер, Общие теоремы о канонической факторизации оператор-функций относительно контура, *Матем. исследования*, **7:3** (Кишинев, 1972), 87—134.

[9] П. М. Блехер, О линейных операторах, аналитически зависящих от параметра, *ДАН СССР*, **5** (1969), 30—36.

[10] И. Ц. Гохберг и Е. И. Сигал, Операторные обобщения теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше, *Матем. сборник*, **84 (126):4** (1971), 607—630.

[11] И. Ц. Гохберг и И. А. Фельдман, *Уравнения в свертках и проекционные методы их решения* (Москва, 1971).

[12] H. Röhl, Das Riemann-Hilbertsche Problem der linearen Differentialgleichungen, *Math. Annalen*, **133** (1957), 1—25.

[13] H. Grauert, Analytische Faserungen über holomorph Räumen, *Math. Annalen*, **135** (1958) 263—273.

[14] H. Cartan, Espaces fibrés analytiques, *Symposium International de Topologia Algebraica* (1958), 97—121.

[15] L. Bungart, On analytic fiber bundles. 1. Holomorphic fiber bundles with infinite dimensional fibres, *Topology*, **7** (1968), 55—68.

[16] И. Ц. Гохберг и Ю. Лайтерер, О коциклах, оператор-фтнкциях и семействах подпространств, *Матем. исследования*, **8:2** (Кишинев, 1973).

(Поступило 3/VII/1972)